◪ **Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με $f(x)=\dfrac{1}{1+|x|}$, $g(x)=\dfrac{1}{1-|x|}$.**

α) Να βρεθούν τα πεδία ορισμού και τιμών τους.

β) Να βρεθεί για ποια $x\in \mathbf{R}$ ορίζεται η $g\circ f$ και να βρεθεί ο τύπος της.

(Bacalaureat Maroc)

Λύση:

α) Το πεδίο ορισμού της f είναι το R, διότι $1+|x|\neq 0$, $\forall x\in \mathbf{R}$. Το πεδίο ορισμού της g είναι το $\mathbf{R}-\{1,-1\}$, διότι $1-|x|=0 \iff |x|=1 \iff x=\pm 1$. Επειδή $1+|x|\geq 1 \implies 0<\dfrac{1}{1+|x|}\leq 1 \implies 0<f(x)\leq 1$, το πεδίο τιμών της f είναι το $(0,1]$.

Για να βρούμε το πεδίο τιμών της g, εργαζόμαστε ως εξής. Είναι

$$\psi=\frac{1}{1-|x|} \iff \left\{\begin{array}{l} 1=\psi(1-|x|) \\ x\neq\pm 1 \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{ll} |x|\psi=\psi-1 & (1) \\ x\neq\pm 1 & \end{array}\right\}$$

Παρατηρούμε ότι $\psi\neq 0$, διότι για $\psi=0$ η (1) δίνει $0=-1$, που είναι αδύνατο. Έτσι είναι: $|x|=\dfrac{\psi-1}{\psi}$, $x\neq\pm 1$, $\psi\neq 0 \iff \dfrac{\psi-1}{\psi}\geq 0$, $\dfrac{\psi-1}{\psi}\neq 1$, $\psi\neq 0 \iff \{\psi(\psi-1)\geq 0,\ \psi-1\neq\psi,\ \psi\neq 0\} \iff \{\psi\leq 0 \text{ ή } \psi\geq 1,\ \psi\neq 0\}$.

Άρα $\psi\in(-\infty,0)\cup[1,+\infty)$, δηλαδή το σύνολο τιμών της g είναι το:

$$(-\infty,0)\cup[1,+\infty)$$

β) Για να ορίζεται η σύνθεση $g\circ f$, πρέπει το σύνολο:

$$A_1=\{x\in \mathcal{D}(f):\ f(x)\in\mathcal{D}(g)\}$$

να είναι διάφορο του κενού. Είναι:

$$A_1=\{x\in\mathbf{R}:\ f(x)\in\mathbf{R}-\{-1,1\}\}=\{x\in\mathbf{R}:\ f(x)\neq 1 \text{ και } f(x)\neq -1\}=$$

$$=\left\{x\in\mathbf{R}:\ \frac{1}{1+|x|}\neq 1 \text{ και } \frac{1}{1+|x|}\neq -1\right\}=\left\{x\in\mathbf{R}:\ \frac{1}{1+|x|}\neq 1\right\}=\{x\in\mathbf{R}:\ 1\neq 1+|x|\}=$$

$$=\{x\in\mathbf{R}:\ |x|\neq 0\}=\mathbf{R}^*\neq\emptyset.$$

Είναι ακόμα $(g\circ f)(x)=g\left(\dfrac{1}{1+|x|}\right)=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+|x|}}=\dfrac{1+|x|}{|x|}$.

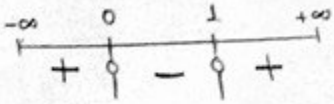
• Δίνεται η $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$

Να βρείτε το $D(f)$ και $R(f)$

ΛΥΣΗ

• $D(f)=\left\{x\in\mathbb{R}: \dfrac{x}{x-1}\geq 0 \text{ και } x-1\neq 0\right\}=\left\{x(x-1)\geq 0 \text{ και } x\neq 1\right\}\Rightarrow$

$\Rightarrow D(f)=(-\infty,0]\cup(1,+\infty)$



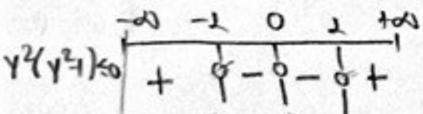
• $R(f)=\{y\in\mathbb{R}:\exists x\in D(f): y=f(x)\}=\left\{y\geq 0: \exists x\in(-\infty,0]\cup(1,+\infty): y=\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}\right\}=$

$=\left\{y\geq 0:\exists x\in(-\infty,0]\cup(1,+\infty): y^2=\dfrac{x}{x-1}\right\}=\left\{y\geq 0:\exists x\in(-\infty,0]\cup(1,+\infty): y^2(x-1)=x\right\}$

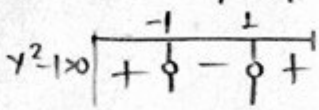
$=\left\{y\geq 0:\exists x\in(-\infty,0]\cup(1,+\infty): (y^2-1)x=y^2\right\}=\left\{y\geq 0:\exists x\in(-\infty,0]\cup(1,+\infty): x=\dfrac{y^2}{y^2-1}\right\}$

$x=\dfrac{y^2}{y^2-1}$, $x\in(-\infty,0]\cup(1,+\infty)\Rightarrow \dfrac{y^2}{y^2-1}\leq 0$ ή $\dfrac{y^2}{y^2-1}>1\Rightarrow$

$\Rightarrow y^2(y^2-1)\leq 0$ ή $\dfrac{y^2}{y^2-1}-1>0\Rightarrow \dfrac{1}{y^2-1}>0$

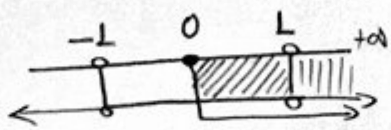


$y\in(-1,1)$



$y\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

και $y\geq 0$



Άρα, $R(f)=[0,1)\cup(1,+\infty)$

Έστω $f: A \to B$ συνάρτηση και $X, Y \subseteq A$. Τότε:

1) $X \subseteq Y \Rightarrow f(X) \subseteq f(Y)$
2) $f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y)$
3) $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$
4) $f(X - Y) \supseteq f(X) - f(Y)$

ΛΥΣΗ:

1) Έστω $X, Y \subseteq A$ με $f: A \to B$ συνάρτηση
Επίσης, $X \subseteq Y$ και ας είναι τυχόν $y \in f(X) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (\exists x \in X): f(x) = y \overset{X \subseteq Y}{\Rightarrow} (\exists x \in Y): f(x) = y \Leftrightarrow y \in f(Y)$
Άρα, $f(X) \subseteq f(Y)$

2) Γνωρίζουμε ότι:
$$\left.\begin{array}{l} X \cap Y \subseteq X \overset{(1)}{\Longrightarrow} f(X \cap Y) \subseteq f(X) \\ X \cap Y \subseteq Y \overset{(1)}{\Longrightarrow} f(X \cap Y) \subseteq f(Y) \end{array}\right\} \Rightarrow f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y)$$

3) Ας είναι τυχόν $y \in f(X \cup Y) \Leftrightarrow (\exists x \in X \cup Y): f(x) = y \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (\exists x \in X$ ή $\exists x \in Y): f(x) = y \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow [(\exists x): x \in X$ με $f(x) = y]$ ή $[(\exists x): x \in Y$ με $f(x) = y] \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow y \in f(X)$ ή $y \in f(Y) \Leftrightarrow y \in f(X) \cup f(Y)$

4) Έστω $y \in f(X) - f(Y) \Leftrightarrow y \in f(X) \cap f(Y)^c \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow y \in f(X)$ και $y \notin f(Y) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow [(\exists x): x \in X, f(x) = y]$ και $[(\forall x): x \in Y, f(x) \neq y] \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (\exists x): x \in X, y = f(x)$ και $x \notin Y \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow y \in f(X - Y)$.